

非线性不平衡转子轴承系统周期解的预测*

西安交通大学 刘恒** 虞烈 谢友柏
机械工业部 姚福生

【摘要】 本文提出一种对非线性不平衡转子轴承系统周期解进行预测的新型算法,它利用系统周期解的稳态及瞬态信息,反解雅可比矩阵,实现对系统周期解的预测追踪,并利用反解得出的雅可比矩阵,求得系统周期解的 Floquet 乘子以判别其非线性稳定性。文中以刚性不平衡转子轴承系统为例,实现了周期解的预测追踪及非线性稳定性判别,说明了新算法的有效性。

主题词: 转子 轴承 非线性 周期解 预测

分类号: O 317. 2

1 引言

转子轴承系统是一类重要的非线性动力系统,广泛应用于工业实际。由于实际的转子轴承系统难以完全消除不平衡量,因此,由不平衡量造成的系统工频振动周期解就成了此类系统的典型运动形式,对此周期解随工作转速的变化进行预测可以使我们先对转速变化后的振动情况心中有数,有助于避免由于振动过大引起的破坏,具有重要的实际意义。为此,本文提出一种对不平衡转子轴承系统非线性周期解进行预测追踪的新型算法。不同与其它追踪算法^[1~3],它利用系统周期解的稳态及瞬态信息,反解雅可比矩阵,实现对系统周期解的预测追踪,并利用反解得出的雅可比矩阵,求得系统周期解的 Floquet 乘子以判别系统的稳定性。由于此算法的实施仅利用了可观测得出的系统周期解稳态及瞬态信息,因而可望应用于实际。

2 预测方法

不平衡转子轴承系统可表示为如下单参数周期性非自治的非线性动力系统

$$\Phi: \quad du/dt = f(t, \mu, u) = f(t + T, \mu, u) \quad (t, \mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (1)$$

式中: t 表示时间, μ 为外参数, u 为系统的状态向量。如果把时间表示成显状态变量,则可以以付出增加一维的代价将其改写成自治系统^[4]:

$$du/dt = f(\theta, \mu, u), \quad d\theta/dt = 1 \quad [t, \mu, (\theta, u)] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^n \quad (2)$$

相空间是流形 $S^1 \times \mathbb{R}^n$, 这里圆分量 $S = \mathbb{R} \pmod{T}$ 反映了矢量场 f 对变量 θ 的周期性依赖。

外参数 μ 为一定值 μ_m 时, 定义一个全局横截面:

$$\Sigma = \{(\theta, u) \in S^1 \times \mathbb{R}^n \mid \theta = \theta_0\} \quad (3)$$

作为 Poincaré 截面, 则利用 Poincaré 映射的思想, 可以将(1)式转化为 Σ 上的点映射系统:

$$u^{(k+1)} = P(u^{(k)}, \mu_m) \quad k \in Z \quad (4)$$

其中

$$P(q, \mu_m) = u(\theta + T, q, \mu_m) \quad (5)$$

因此, 求系统(1)式周期解的问题可以转化为求解非线性方程:

$$G(u, \mu) = u - P(u, \mu) = 0 \quad \text{或} \quad u = P(u, \mu) \quad (6)$$

的问题。对方程(6)而言, μ 变化时其解将构成一条解曲线, 为实现对此解曲线的追踪, 首先将方程(6)化为常微分方程的 Cauchy 问题(Davidenko 方程)^[2]:

$$\dot{u}(\mu) = -[G'_u(u, \mu)]^{-1} \times G'_\mu(u, \mu), \quad u(\mu_0) = u_0 \quad (7)$$

则其过 (u_0, μ_0) 的积分曲线就是方程(6)的解曲线, 采用欧拉型积分公式有:

$$u_{n+1} = u_n - [G'_u(u, \mu)]^{-1} \times G'_\mu(u, \mu) \times \Delta\mu, \quad \mu_{n+1} = \mu_n + \Delta\mu \quad (8)$$

利用(8)式, 就可以根据 $\mu = \mu_n$ 时的解 u_n 对第 $n+1$ 步的解 u_{n+1} 进行预测。这里如何求得系统在 $\mu = \mu_n$ 时稳态解的雅可比矩阵 $G'_u(u_n, \mu_n)$ (简记为 G'_{u_n}) 及其对参数 μ 的偏导数 $G'_\mu(u_n, \mu_n)$ (简记为 G'_{μ_n}) 是预测实施的关键。现有的方法^[1-3]通常采用将式(6a)直接对 u 和 μ 求偏导来得到 G'_{u_n} 和 G'_{μ_n} , 然而当实际系统中 G 不能解析表达, G'_{u_n} 和 G'_{μ_n} 往往难以直接求得。为了解决这一问题, 本文采用可观测得出的系统周期解稳态及瞬态信息反解雅可比矩阵, 下面具体介绍之。

雅可比矩阵的反解方法: 由(6)式可知:

$$G'_u = I - P'_u \quad (9)$$

其中 I 为单位矩阵, 因此求出 Poincaré 映射 P_u 在 u_n 处的雅可比矩阵 G'_{u_n} , 即可根据(9)式方便地得到, 反之亦然。

根据牛顿迭代法的基本思想, 将(6)式在 u_n 附近线性化:

$$G(u) \approx G(u_n) + G'_u \times (u - u_n) \quad \text{或} \quad P(u) \approx P(u_n) + P'_u \times (u - u_n) \quad (10)$$

将(10)式代入(4)式可得:

$$u^{(k+1)} \approx P'_u \cdot u^{(k)} + B_n \quad (11)$$

其中: $B_n = P(u_n) - P'_u \cdot u_n$ 为常矢量。

若系统为 m 阶, 则假设系统周期解 u_n 的受扰运动在同向穿过 Poincaré 截面时留下的一系列映射点 $u^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m+1$) 均落在 u_n 的某一邻域内, 于是有:

$$\begin{cases} u^{(1)} \approx P'_u \cdot u^{(0)} + B_n, & u^{(2)} \approx P'_u \cdot u^{(1)} + B_n \dots\dots, & u^{(m+1)} \approx P'_u \cdot u^{(m)} + B_n \end{cases}$$

令 $u_{m+1} = \{u^{(1)} \ u^{(2)} \dots u^{(m+1)}\}$, 则为: $u_{m+1} \approx [P'_u B_n] \cdot [u_m \ E]^T$ (12)

其中 $E = \{1 \ 1 \dots 1\}$, 故此可近似得出 P'_u 和 B_n :

$$[P'_u B_n] = [u_m \ E]^{-1} \cdot u_{m+1} \quad (13)$$

再利用式(9)即可得到 G'_{u_n} 。这种方法本文将其称为反解雅可比矩阵法。

偏导数 G'_{μ_n} 的反解法: 若已测得 $\mu = \mu_n$ 时系统的稳态周期解 u_n , 则可用差分方法得出: 在系统位于其稳态周期解在 Poincaré 截面上的穿越点 u_n 时, 给 μ_n 施加小扰动 $\Delta\mu$, 即 $\mu = \mu_n + \Delta\mu$, 考察一个周期后系统轨迹再次经过 Poincaré 截面时的穿越点 u_n , 则偏导数 G'_{μ_n} 为:

$$G'_{\mu_n} = (u_n - u_n) / \Delta\mu \quad (14)$$

上述差分方法中 $\hat{u}_n$ 难以在实际条件下得出, 故可用上述方法求得了 $\mu = \mu_{n-1}$ 时的雅可比矩阵 $P'_{u_{n-1}}$ 和 B_{n-1} , 且 μ_{n-1} 在 μ_n 的邻域内, $\Delta\mu = \mu_{n-1} - \mu_n$, 则:

$$u_n \approx P'_{u_{n-1}} \cdot u_n + B_{n-1} \quad (15)$$

于是有:

$$G'_{\mu_n} = (P'_{u_{n-1}} \cdot u_n + B_{n-1} - u_n) / (\mu_{n-1} - \mu_n) \quad (16)$$

至此,可以看出:通过对系统第 $n-1$ 步 ($\mu = \mu_{n-1}$) 及第 n 步 ($\mu = \mu_n$) 的稳态周期解及其受扰运动的观测,然后从观测数据中得出系统稳态周期解穿过选定的 Poincaré 截面时留下的穿越点 u_n , 及其受扰运动穿过此 Poincaré 截面时留下的一系列映射点 $u(k)$ ($k = 1, 2, \dots, m+1$) 后,即可利用 (13) 及 (16) 两式求得雅可比矩阵 P'_{u_n} (或 G'_{u_n}) 与偏导数 $G'_\mu(u_n, \mu_n)$, 进而利用 (8) 式实现对第 $n+1$ 步 ($\mu = \mu_{n+1}$) 系统周期解的预测。

同时,根据 Floquet 理论,求得的雅可比矩阵 P'_{u_n} 的特征值中,模最大的特征值 λ 被称为 Floquet 乘子,其模的大小反应了周期解稳定性的大小:小于 1 时周期解稳定,大于 1 时周期解发散,模越小周期解越稳定,模越大周期解越不稳定,因此反解得出的雅可比矩阵 P'_{u_n} 也可用于周期解稳定性的即时判别。下面给出本算法的实施步骤:

- (1) 将外参数 ω 的变化范围等分为 n 段,共 $n+1$ 个工作点: $\omega, \omega, \dots, \omega$;
- (2) 为对工作点 $i+1$ 周期解的预测追踪,首先分别测出工作点 ω 及 ω_{i-1} 周期稳态解 $u_i(t)$ 和 $u_{i-1}(t)$, 然后选取某一关心时刻 $\tau = \tau_0$ 的超截面为 Poincaré 截面, 求出 $u_i(t)$ 和 $u_{i-1}(t)$ 穿越 Poincaré 截面时的穿越点 u_i 和 u_{i-1} ;
- (3) 分别对 $u_i(t)$ 和 $u_{i-1}(t)$ 施加扰动后,测量并求出其瞬态轨迹穿越 Poincaré 截面时的一系列映射点 $u^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m+1$);
- (4) 按式 (13) 反解出工作点 ω 及 ω_{i-1} 的雅可比矩阵 $P'_{u_i}, P'_{u_{i-1}}$ 和常矩阵 B_i, B_{i-1} , 然后按式 (16) 反解出工作点 ω 的偏导数 $G'_\mu(u_n, \mu_n)$;
- (5) 按式 (8) 得出工作点 ω_{i+1} 处系统周期解在 Poincaré 截面上穿越点的预测值,并求出 P'_{u_i} 及 $P'_{u_{i-1}}$ 的特征值,选取模最大者作为 Floquet 乘子即时判别周期解 $u_i(t)$ 和 $u_{i-1}(t)$ 稳定性。

这样就完成了这一步的预测追踪,不断重复这一过程便可完成对系统周期解在整个研究范围内的预测追踪,上述方法本文称之为周期解的反解型预测追踪算法。下面以不平衡刚性转子轴承系统为例,给出此方法的一个应用实例,由于旨在说明算法的可行性,因此算例中算法实施所需要的系统稳态周期解及其受扰运动的观测数据采用数值方法模拟给出。

3 数值算例

本文采用支承在一对固定的相同同心圆柱颈轴承的刚性单圆盘转子组成的最简单的动力模型作为研究对象,且不考虑陀螺效应,因此这个动力模型可以用一个圆轴承支承一个载荷为总载荷一半的转子的平面运动来表示,如图 1。

这一系统的运动可以用如下微分方程组表示:

$$\begin{cases} dx_1/d\tau = x_3, & dx_2/d\tau = x_4 \\ dx_3/d\tau = \frac{S}{\omega^2} \left[\frac{g_x}{S} - \omega \frac{x_1 f_r + x_2 f_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right] + e \cos \tau \\ dx_4/d\tau = \frac{S}{\omega^2} \left[\frac{g_y}{S} - \omega \frac{x_2 f_r - x_1 f_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right] + e \sin \tau \end{cases} \quad (17)$$

其中: $\{x_1 x_2 x_3 x_4\}^T = \{x y dx/d\tau dy/d\tau\}$ 为状态变量,是

轴心的无量纲位置和速度; τ, ω 和 e 分别是无量纲的时间、转速及偏心量; g_x 和 g_y 为外载荷分量; f_r 和 f_i 为油膜力分量,本文采用“静态 π ”液膜及无限长轴承假设下的解析表达式,可称之

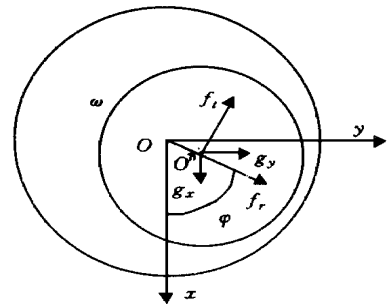


图 1 转子轴承系统动力模型简图

为 Sommerfeld 模型; S 为系统参数, $S = [6\mu B (R^3/c^2)]/\sqrt{GdM}$ 。

对 $S = 1.0$, $e = 0.1$ 的系统, 工频振动周期解在转速 $\omega = 2.12745$ 处经倍周期分岔产生 $2T$ 周期解。本文选取系统转速 $\omega = 1.40$ 至 $\omega = 2.15$ 的范围, 取步长 $\Delta\omega = 0.03$, 将其等分为 26 个工作点, 对此系统工频振动对应的周期稳态解进行了预测追踪及稳定性判别。具体实施中, Poincaré 截面取为 $\tau = 0$ 时的超截面, 瞬态轨迹则是在 $\tau = 0$ 时刻, 对系统周期稳态解施加大小为 0.02 的 y 向位移扰动后用数值积分得出, 而用打靶法求出的稳态周期解则作为真实值用以和预测值对比。

图 2(a) 及 (b) 分别给出了在 $\tau = 0$ 这一 Poincaré 超截面上周期解穿越点的位移和速度的预测值与真实值, 可以看出: 从第一个预测点 $\omega = 1.46$ 至到倍周期分岔后的预测点 $\omega = 2.15$, 用本文算法得到的预测值与打靶法求出的真实值均具有很好的一致性。

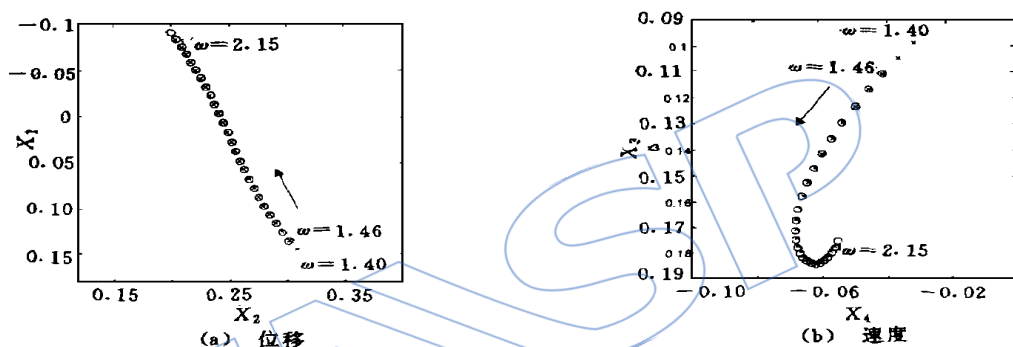


图 2 $\omega = 1.46 \sim 2.15$ 范围内, Poincaré 超截面 $\tau = 0$ 上周期解穿越点的预测值与真实值的对比

为进一步看清此处系统周期解随 ω 的演化规律, 图 3 给出了 $\omega = 1.46$, $\omega = 1.84$ 及 $\omega = 2.15$ 三个典型转速下的系统周期解轨迹。可以看出: 它们穿越 Poincaré 截面 $\tau = 0$ 时的穿越点 (用 $\times$ 表示) 与预测值一致, 从而验证了算法的正确性及有效性。

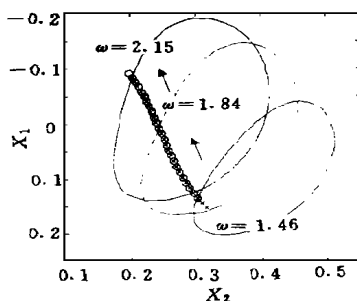


图 3 若干典型转速下系统周期解轨迹及其在 Poincaré 超截面 $\tau = 0$ 上穿越点与预测值的对比

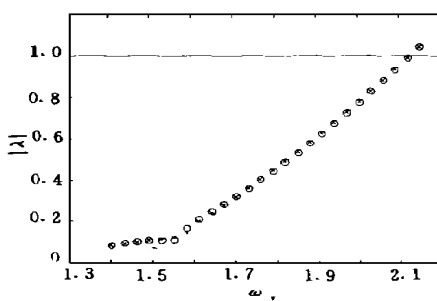


图 4 系统转速 $\omega = 1.40$ 至 $\omega = 2.15$ 的范围内, Floquet 乘子模的反解值与差分法求出真实值的对比

为判别周期解的稳定性,对在每一个转速点用前述反解方法求出的雅可比矩阵求解特征值问题,得到特征值模的最大值即为 Floquet 乘子,同时,这里将用传统的数值差分方法求得雅可比矩阵 G_{un}' 求解特征值问题后,得到特征值模的最大值作为 Floquet 乘子的真实值。图 4 给出的就是系统转速 $\omega=1.40$ 至 $\omega=2.15$ 的范围内,用上述反解法求出的 Floquet 乘子模与传统的差分法求出的 Floquet 乘子模(这里称之为真实值)的对比图示。可以看出:反解法求出的 Floquet 乘子相当准确,可以实用。

4 结 论

(1) 本文提出的反解型预测追踪算法,由于它仅利用系统周期解的稳态及瞬态信息,就可有效地对不平衡转子轴承系统这类单参数周期性非自治系统的周期解进行预测及追踪,因而具有广泛的适用性;

(2) 算法实施中,反解得出的雅可比矩阵的模的最大值(即系统周期解的 Floquet 乘子)可用于判别系统周期解的稳定性;

(3) 从理论上讲,本算法可仅利用对实际系统的观测信息实现,因而有希望在实际不平衡轴承转子系统状态监测预警及稳定性实时判别中得到应用。

参 考 文 献

- 1 P Sundararajan P, Noah S T. Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arelength Continuation Method- Application to Rotor System. A S M E Journal of V ibration and A coustics, 1997, 119
- 2 季海波, 武际可, 胡海昌 分叉问题的几何描述及其计算方法 中国科学(A), 1991: 947- 854
- 3 R H B Fey, D H van Campen, A de Kraker Long Term Structural Dynamics of Mechanical Systems with Local Nonlinearities", A S M E Journal of V ibration and A coustics, 1996, 118:
- 4 Booss G, Joseph D D. Elementary stability and Bifurcation Theory. Springer- Verlag, New York Inc 1980
- 5 凌复华 非线性振动系统周期解的数值分析 应用数学和力学, 1983 7, 4(4):
- 6 刘铁牛, 王伟 非线性系统周期解不动点迭代法 应用数学和力学, 1987, 8(3):
- 7 Nataraj C, Nelson H D. Periodic Solution in Rotordynamic Systems with Nonlinear Supports A S M E Journal of V ibration and A coustics, 1989, 111:
- 8 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear Dynamics and Chaos John Wiley & Sons Ltd, New York 1986

(责任编辑 王震华)

tion research indicates that this new method can monitor the crack fault more effectively.

Key Words Blades Cracks Faults Acoustic measurements Monitoring simulation

PREDICTION FOR NONLINEAR PERIODIC SOLUTIONS OF UNBALANCED ROTOR BEARING SYSTEM

Liu Heng, Yu Lie, Xie Youbai

(Lubrication Theory and Bearing Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710048)

Yao Fusheng

(Ministry of Mechanical Engineering, Beijing 100823)

ABSTRACT A new prediction method for periodic solutions of unbalanced bearing rotor system is provided, which uses the steady state and transient state information of the periodic solutions to solve Jacobian matrix. Then this method can predict and trace the periodic solution of the system. At the same time, the Floquet multiplier of the periodic solution can be obtained from Jacobian matrix to judge its nonlinear stability. Because the steady state and transient state information of the periodic solution can be observed in practice, the method would be used widely. A rigid unbalanced bearing rotor system is taken as an example, the T periodic solution of this system is predicted and traced.

Key Words Rotors Bearings nonlinearity Periodic solutions Prediction

AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF HEAD IN SECTOR ANNULAR COMBUSTOR

Zhao Jianxing, Xu Jin, Zhan Xuewei

(2nd Dept Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

Lai Shouchang, Deng Shuwen, Deng Wu

(Nanhua Power Plant Research Institute, Zhuzhou 412002)

ABSTRACT The aerodynamic characteristics of sudden expansion region between the prediffuser exit and the head of the flametube in relation to its geometric parameters are investigated with the purpose of the annular combustor optimization. The mass flow ratio, total pressure loss of outer and inner annulus, and whole combustor are measured with different total pressure probes and flowmeters, respectively. Flow velocity profiles in the asymmetric sudden expansion region are measured by Laser Doppler anemometry. Experimental results of flow field total pressure loss and flow ratio for two types of combustor and seven configuration sectors show that two eddies occur in the sudden expansion regions; the prediffuser geometric parameters, such as deflection angle; relative sudden gap L/h and inlet Mach number, have an effect on the airflow patterns, drag coefficient and mass flow ratio.

Key Words Combustion chambers Flow characteristics Measurements